11/12/2017

Μάθημα 17ο

Διαφ. Εξισώσεις

Πρόταση (Θεώρημα 20, σελ 100-101)

$(E_0): \; a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$

Υποθέτω ότι $a_i \in \mathbb{R}$ (σταθεροί και πραγματικοί)

Τότε για την ομογενή γ.δ.ε (E_0) ισχύουν τα εξής:

i) Αν y λύση της (E_0) τότε $\operatorname{Re}y$ και $\operatorname{Im}y$ (πραγμ.) λύσεις

ii) κάθε λύση με πραγματικές αρχικές τιμές είναι πραγματική

iii) Αν $\{y_1, \dots, y_n\}$ ΘΣΛ με πραγματικές λύσεις τότε η y πραγματική λύση αν.ν $\exists\, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ με $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$

iv) ... εκτός ύλης και η αποδ. για (iv)

Απόδειξη

i) Ας είναι y λύση της (E_0)

Έχουμε $y(x) = (\operatorname{Re}y)(x) + i(\operatorname{Im}y)(x)$

και για $x \in \mathbb{R}$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[(\operatorname{Re}y)(x) + i(\operatorname{Im}y)(x) \right]^{(k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\operatorname{Re}y^{(k)}(x) + i \operatorname{Im}y^{(k)}(x) \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[a_k (\operatorname{Re}y)^{(k)}(x) + i\, a_k (\operatorname{Im}y)^{(k)}(x) \right] \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (\operatorname{Re}y)^{(k)}(x) \right) + i \left(\sum a_k (\operatorname{Im}y)^{(k)}(x) \right) = 0 \;, \; x \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (\operatorname{Re}y)^{(k)}(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (\operatorname{Im}y)^{(k)}(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

ii) Ας είναι y λύση της (E_0) με
$y(x_0)=a_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0)=a_{n-1}$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$
και $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$
Παρατηρώ ότι η (πραγματική) συνάρτηση $(\operatorname{Im} y)(x), x \in \mathbb{R}$
είναι λύση της (E_0) με αρχικές συνθήκες στο x_0
$(\operatorname{Im} y)(x_0)=0, \dots, (\operatorname{Im} y)^{(n-1)}(x_0)=0$
$= \operatorname{Im} a_{n-1}=0$

Δηλ. η $(\operatorname{Im} y)$ είναι λύση της (E_0) με μηδενικές αρχικές τιμές στο x_0, άρα $\operatorname{Im} y=0$ δηλ. y πραγματική

iii) Ας είναι $\{y_1, \dots, y_n\}$ ΘΣΛ με πραγματικές λύσεις

$(\Leftarrow)$ Προφανώς αν τα $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ τότε
$y(x)=c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)$ πραγματική λύση

$(\Rightarrow)$ Ας είναι y μια πραγματική λύση της (E_0)
Τότε η y γράφεται (μονοσήμαντα)
$y(x)=c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x), \quad x \in \mathbb{R}$
Θα αποδείξω ότι $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

Επειδή η $y(x) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ θα είναι για όλα τα $x \in \mathbb{R}$
$0=(\operatorname{Im} y)(x) = \operatorname{Im}[c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)] =$
$= \operatorname{Im}(c_1y_1(x))+\dots+\operatorname{Im}(c_ny_n(x)) = (\operatorname{Im} c_1)y_1(x)+\dots+(\operatorname{Im} c_n)y_n(x) \Rightarrow$
$\operatorname{Im} c_1=\dots=\operatorname{Im} c_n=0$ επειδή $y_1, \dots, y_n$ γραμμ. ανεξ.
άρα $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

για το (i)
αφού y λύση της (E_0) $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$
τότε μπορώ να βάλω ότι οι λύσεις είναι Re και Im
διότι μπορώ να το γράψω
$0 = a_n [Re y + i Im y]^{(n)} + \dots + a_0 [Re y + i Im y]$

Άσκηση B-20 (Πρόβολη)
$y'' + \omega^2 y = A\cos(\omega x)$, $x \geq 0$ $(\omega, A > 0)$
i) $\lim_{+\infty} |y(x)| = +\infty$

ii) $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(Σαν να έχω κάποια ταλάντευση, ιδιοσυχνότητα ω)
Παίρνω αρχικά την ομογενή
(E_0): $y'' + \omega^2 y = 0$
παίρνω τώρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο
$p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$
$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0$
ρίζες $\lambda_1 = \omega i$, $\lambda_2 = -\omega i$

ΒΣΛ $\{\cos(\omega x), \sin(\omega x)\}$, $x \geq 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(\omega x) & \sin(\omega x) \\ -\sin(\omega x) & \omega\cos(\omega x) \end{vmatrix} = \omega\cos^2(\omega x) + \omega\sin^2(\omega x) = \omega > 0$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin(\omega x) \\ 1 & \omega\cos(\omega x) \end{vmatrix} = -\sin(\omega x)$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos(\omega x) & 0 \\ -\omega \sin(\omega x) & 1 \end{vmatrix} = \cos(\omega x)$$

Οποτε εχω μια μερικη λυση

$$y_\mu(x) = y_1(x) \int_0^x \frac{W_1(s)}{W(s)} \cdot \frac{b(s)}{1} \, ds + y_2(x) \int_0^x \frac{W_2(s)}{W(s)} \cdot \frac{b(s)}{1} \, ds \Rightarrow$$

$$y_\mu(x) = \cos(\omega x) \int_0^x \frac{-\sin(\omega s)}{\omega} A \cos(\omega s) \, ds + \sin(\omega x) \int_0^x \frac{\cos(\omega s)}{\omega} A \cos(\omega s) \, ds$$

$$y_\mu(x) = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega x) \int_0^x \sin(\omega s) \cos(\omega s) \, ds + \frac{A}{\omega} \sin(\omega x) \int_0^x \cos^2(\omega s) \, ds \Rightarrow$$

....

$$y_\mu(x) = \frac{A}{2\omega} x \sin(\omega x)$$

Ολες οι λυσεις της (Ε) δινονται απο τον τυπο

φραγμενες συναρτησεις

$$y(x) = c_1 \cdot \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x) + \frac{A}{2\omega} x \sin(\omega x), \quad x > 0$$

c_1, c_2 : αυθ. σταθερες

Αρκει να βρω μια ακολουθια $x_\nu \to +\infty$ τ.ω το $\lim_{+\infty} |y(x_\nu)| = +\infty$

$$\sin(\omega x) = 1 \Rightarrow \omega x_\nu = \underset{\to +\infty}{2\pi\nu} + \frac{\pi}{2} \quad \text{οποτε}$$

$$x_\nu = \frac{4\pi\nu + \pi}{2\omega}$$

Για $x_\nu = \frac{(4\nu+1)\pi}{2\omega}$ έχουμε

$\lim_{+\infty} x_\nu = +\infty$ και $\lim_{+\infty} y(x_\nu) = \lim_{+\infty} c_1 \cancel{\cos(\omega x_\nu)}^{0} + \lim_{+\infty} c_2 \cancel{\sin(\omega x_\nu)}^{1} +$

$+ \lim_{+\infty} \frac{A\omega}{2\omega} x_\nu \sin(\omega x_\nu) =$

$= 1 + \lim_{+\infty} \frac{A}{2} \frac{(4\nu+1)\pi}{2\omega} \cdot 1 = +\infty$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(s,x)\,ds\right) = f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} f(s,x)\, b(s)\,ds$$

Άσκηση 3-53

$y'' + 8y' + 25y = 2\cos x \quad , x \in \mathbb{R}$

$\exists$ σταθερές a, δ : $\forall y$ λύση είναι $\lim_{+\infty}[y(x) - a\cos(x-\delta)] = 0$

(Σ_0) : $y'' + 8y' + 25y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$

Άρα ΒΣΛ $\{y_1(x) = e^{-4x}\cos(3x), y_2(x) = e^{-4x}\sin(3x)\}$, $x \in \mathbb{R}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-4x}\cos(3x) & e^{-4x}\sin(3x) \\ -4e^{-4x}\cos(3x) - 3e^{-4x}\sin(\omega x) & -4e^{-4x}\sin(3x) + 3e^{-4x}\cos(\omega x) \end{vmatrix} =$$

$= 3e^{-8x}\cos^2(\omega x) + 3e^{-8x}\sin^2(\omega x) \Rightarrow W(x) = 3e^{-8x}$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-4x}\sin(3x) \\ 1 & -4e^{-4x}\sin(3x) + 3e^{-4x}\cos(3x) \end{vmatrix} = -e^{-4x}\sin(3x)$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{-4x}\cos(3x) & 0 \\ (\quad)' & 1 \end{vmatrix} = e^{-4x}\cos(3x)$$

Αρα μια λυση

$$y_\mu(x) = e^{-4x}\cos(3x)\int_0^x -\frac{e^{-4s}\sin(3s)}{3e^{-8s}} \cdot \frac{2\cos(s)}{1}\,ds +$$

$$+e^{-4x}\sin(3x)\int_0^x \frac{e^{-4s}\cos(3s)}{3e^{-8s}}\, 2\cos(s)\,ds = ..$$

$= \dots$ πραξεις

ολοκληρωση κατα παραγοντες και

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

μετα απο πραξεις εχω

$$y_\mu(x) = \frac{3}{40}\cos x + \frac{1}{40}\sin x$$

Αρα μια λυση θα ειναι

$$y(x) = c_1 e^{-4x}\cos(3x) + c_2 e^{-4x}\sin(3x) + \frac{3}{40}\cos x + \frac{1}{40}\sin x$$

Scanned by CamScanner

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\left(\underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos\vartheta}\cos x + \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\sin\vartheta}\sin x\right)$$

Οπότε

$$\frac{3}{40}\cos x + \frac{1}{40}\sin x = \sqrt{\left(\frac{3}{40}\right)^2+\left(\frac{1}{40}\right)^2}\cdot\left[\frac{3/40}{\sqrt{(\ )^2+(\ )^2}}\cos x + \frac{1/40}{\sqrt{(\ )^2+(\ )^2}}\sin x\right] = (*)$$

Θέτουμε $\cos\vartheta = \dfrac{3/40}{\sqrt{(\ )^2+(\ )^2}}$, $\sin\vartheta = \dfrac{1/40}{\sqrt{(\ )^2+(\ )^2}}$

$$(*) = \overbrace{\sqrt{\frac{9+1}{40^2}}}^{a}\,\underbrace{(\cos\vartheta\cos x + \sin\vartheta\sin x)}_{\cos(x-\vartheta)}$$

$\vartheta = \delta$

Επομένως

$$y(x) = c_1 e^{-4x}\cos(3x) + c_2 e^{-4x}\sin(3x) + a\cos(x-\delta)$$

όπου

$$a = \sqrt{\frac{10}{40^2}}, \quad \delta \in (0, \pi/2) \text{ με } \cos\delta = \cos\vartheta, \quad \sin\vartheta = \sin\delta$$

Συνεπώς

$$\lim_{x\to+\infty}\left[y(x) - a\cos(x-\delta)\right] = c_1\cdot 0 + c_2\cdot 0 + \ldots$$

Μέθοδος των αγνώστων σταθερών

(E) $L(y) = a_n y^{(4)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$

με $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ και $a_n \neq 0$

i) $b(x)$ πολυώνυμο m-βαθμού

Ας είναι $a_0, \dots, a_{x-1} = 0$, $a_x \neq 0$

Θέτω $y_\mu^{(x)}(x) =$ πολυώνυμο m-βαθμού

Παράδειγμα 3i, σελ 108

$y^{(4)} + y'' = x^3 + 1$

αντικατάσταση

$y''_\mu(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$

Παραγωγίζω δύο φορές την $y''_\mu(x)$ $(6ax + 2\beta)$

$6ax + 2\beta + ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = x^3 + 1$

$ax^3 + \beta x^2 + (6a + \gamma)x + 2\beta + \delta = x^3 + 1 \Rightarrow$

θα προκύψουν 4 εξισώσεις με 4 αγνώστους

$$\begin{cases} a = 1 \\ \beta = 0 \\ 6a + \gamma = 0 \\ 2\beta + \delta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \beta = 0 \\ 6 + \gamma = 0 \\ \delta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -6 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 3 από βιβλίο

$y'' - 5y' + 6y = x^2 + 3$ Να επιλυθεί

(χ.π) $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ ρίζες $\lambda = 2, 3$ άρα θα έχουμε

ΒΣΛ $\{e^{2x}, e^{3x}\}$

μια μερική λύση $y_\mu(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$

$2a - 5(2ax + \beta) + 6(ax^2 + \beta x + \gamma) = x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$

$6ax^2 + (6\beta - 10a)x + 2a - 5\beta + 6\gamma = x^2 + 3$

Άρα θα έχω 3 εξισώσεις με 3 αγνώστους

$$\begin{cases} 6a=1 \\ 6b-10a=0 \\ 2a-5b+6\gamma=3 \end{cases} \Rightarrow \dots$$

ii) $b(x)=e^{\lambda x}\, p(x)$ πολυώνυμο

Θέτω $y=ze^{\lambda x}$ $\Rightarrow$ ανάγεται στη 1η περίπτωση

Παράδειγμα 3iii

$$y''' + y'' + 2y = x^2 e^{-2x}$$

Θέτω $y = ze^{-2x}$

Άρα

$$[e^{-2x}z''' + 3z''(-2)e^{-2x} + 3z'\,4e^{-2x} + z(-8)e^{-2x}] +$$
$$+ [z''e^{-2x} + 2z'(-2)e^{-2x} + z\,4\,e^{-2x}] + 2ze^{-2x} = x^2 e^{-2x} \Rightarrow$$

$$\cancel{e^{-2x}}\{z''' - 6z'' + 12z' - 8z + z'' - 4z' + 4z + 2z\} = x^2 \cancel{e^{-2x}} \Rightarrow$$

$z''' - 5z'' + 8z' - 2z = x^2$ οπότε έχω πάλι σταθερούς συντελεστές

και μπορώ να το λύσω όπως στην 1η περίπτωση